随笔 20240620

广义韦达定理.

一、在一元二次方程中 $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c为常数, $a\neq 0$). 有

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

这是韦达定理.

二、推广. 在一元n次方程中 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ ($a_0,\ldots,a_n$为常数, $a_n\neq 0$).

有:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\ldots+x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2x_3\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

例题: 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$, 其中$\alpha,\beta,\gamma$是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根.

解: 由于 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0$ 中, x的所有根之和等于 $-a_{n-1}$. # 使用广义韦达定理

所以 $\alpha+\beta+\gamma=0$ # 后续再用行列式知识

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+r_i} \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$